Corrigé de la série 1
Algèbre linéaire   Ens : 4, 5

Exercice 1

Soit $(x,y) \in E$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Si $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois + et $\cdot$ était un espace vectoriel, on devrait avoir, en outre,

$$(\alpha+\beta)(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y).$$

Or, du fait de la nouvelle définition de la loi $\cdot$, on a :

$$(\alpha+\beta)(x,y) = \left((\alpha+\beta)x, \frac{1}{(\alpha+\beta)}y\right).$$

$$\alpha(x,y)+\beta(x,y) = \left(\alpha x, \frac{1}{\alpha}y\right) + \left(\beta x, \frac{1}{\beta}y\right).$$

$$= \left((\alpha+\beta)x, \frac{1}{\alpha}y + \frac{1}{\beta}y\right)$$

Comme, en général

$$\frac{1}{\alpha+\beta} \neq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

alors $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2

1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois précédentes n'est pas un espace vectoriel.
En effet, la loi + n'est pas commutative :

$$(a,b) + (c,d) = (a+b, b+d)$$
$$(c,d) + (a,b) = (c+d, d+b)$$

2. La loi + utilisée ici est la loi + usuelle de $\mathbb{R}^2$.
Intéressons nous à la loi $\cdot$:

$$(\alpha+\beta)(a,b) = \left((\alpha+\beta)^2 a, (\alpha+\beta)^2 b\right)$$
$$= (\alpha^2 a, \alpha^2 b) + (2\alpha\beta a, 2\alpha\beta b) + (\beta^2 a, \beta^2 b)$$

$$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b) + (\beta^2 a, \beta^2 b) \neq (\alpha+\beta)(a,b).$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois précédentes n'est pas le théorème du rang, on a :

$$rg(f_3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f_3 = 3 - 0 = 3.$$

d- Soient $X(x,y)$ et $Y(x',y') \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^3$.

on montre facilement que :

$$\begin{cases} f_4(x,y) + f_4(x',y') = f(x+x', y+y') \\ f_4(\lambda x, \lambda y) = \lambda f_4(x,y) \end{cases}$$

Donc f_4 est une application linéaire.

- Déterminons le rang de f_4 :

Pour cela, on détermine son noyau :

Soit $(x,y) \in \operatorname{Ker} f_4$. Alors on a le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

dont la solution donne : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

- On en déduit donc que $\operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, c'est-à-dire que $\dim \operatorname{Ker} f_4 = 0$

- Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et que f_4 est linéaire, alors le théorème du rang donne : $rg(f_4) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} f_4 = 2.$

Exercice (2)

1- Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

on montre facilement que :

$$\begin{cases} f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x,y,z) + f(x',y',z'). \\ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda f(x,y,z) \end{cases}$$

2- Soit $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est donné par :

$$x - y + 2z = 0$$

une base de $\operatorname{Ker} f$ est :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

3- Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et f est linéaire, alors le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Im} f = 1.$$

On a donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Exercice ③

1- Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre facilement que :

$$g((x,y,z)+(x',y',z')) = g(x,y,z) + g(x',y',z')$$

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda\, g(x,y,z).$$

2- On a : $\begin{cases} g(1,0,0) = (1,2) \\ g(1,1,0) = (-1,0) \\ g(0,0,1) = (2,-1) \end{cases}$

On observe que les vecteurs :

$$(-1,0) \text{ et } (2,-1)$$

de $Im g$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $Im g$.

On en déduit que $Im g = \mathbb{R}^2$.

3) Déterminons $\ker(g)$:

Soit $(x,y,z) \in \ker(g)$. Alors on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x \\ y = 5x, \quad x \in \mathbb{R}. \\ z = 2x \end{cases}$$

Donc $\ker(g) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Exercice ④

Soit $(x,y,z) \in \ker h$. Alors on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 4x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - 5z = 0 \\ 6y - 15z = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - 5z = 0 \end{cases}$

Soit en fin :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{2}z \ , \ z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Ker} h = \operatorname{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2) une famille génératrice de $\operatorname{Im}(h)$ est :

$$\left\{ h(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; h(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; h(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Déterminons une base de $\operatorname{Im}(h)$:

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et h est linéaire, le théorème du rang donne : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker}(h) + \dim \operatorname{Im}(h)$.

c'est-à-dire $\dim \operatorname{Im}(h) = 3 - 1 = 2$

Par ailleurs, on peut voir que la famille : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. Comme $\dim \operatorname{Im}(h) = 2$, c'est une base de $\operatorname{Im}(h)$.

Exercice 5

1 - Déterminons $\dim \operatorname{Im}(f)$ lorsque $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$.

Comme $\mathbb{R}^3$ est ~~dim~~ de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$.

c'est-à-dire $\dim(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$

- Déterminons $\dim \operatorname{Im}(f)$ lorsque $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$

c'est-à-dire : $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$

Déterminons dim Im(f) lorsque $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$:
Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne :

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$$

c'est-à-dire

$$\dim (f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Ker(f)$$
$$= 4 - 2 = 2$$

2 – Déterminons dim Ker(f) lorsque $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ a pour $Im(f) = vec\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$

– Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$$

c'est-à-dire

$$\dim Ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Im(f) = 3-2=1$$

Déterminons dim Ker(f) lorsque $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ a pour image

$$Im(f) = vect\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$$

Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne :

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim Ker(f) + \dim Im(f$$

c'est-à-dire

$$\dim Ker(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Im(f) = 4-2=2$$

Exercice (6)

1) Posons u le vecteur de coordonnées (x,y,z,t).
Ce vecteur s'écrit : $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$
Ainsi, on a, grâce à la linéarité de f :
$$f(u) = x f(e_1) - y f(e_2) + z f(e_3)$$
c'est-à-dire : $f(x,y,z,t) = (x-y+z, -x-z-2t, y+2z+3t)$

2- Soit $(x,y,z,t) \in Ker(f)$. Alors le noyau de f est donné par le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x-z-2t=0 \\ y+2z+3t=0 \end{cases}$$
la résolution de ce système linéaire donne :
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ -y-2t=0 \\ y+2z+3t=0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x-y+z=0 \\ -y-2t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}$$
en fin :
$$\begin{cases} x=-3z \\ y=4z \\ z=z \\ t=-2z \end{cases}, \; z \in \mathbb{R}$$
On en déduit que : $Ker(f) = vect\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

L'application f n'est pas injective.

3) Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et f est linéaire, le théorème du rang donne : $\dim \mathbb{R}^4 = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$

soit $\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Ker(f) = 4 - 1 = 3$.

On peut montrer que la famille de vecteurs de $Im(f)$:
$$\{f(e_1); f(e_2); f(e_3)\}$$
est libre, donc elle forme une base $Im(f)$.

L'application est surjective.

Exercice 7

1- Nous allons montrer que la famille :

$$\{f_1+f_2 ; -f_1+f_2 , f_1+3f_2+2f_3\}$$

est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\alpha(f_1+f_2)+\beta(-f_1+f_2)+\gamma(f_1+3f_2+2f_3)=0$$

On a alors $(\alpha-\beta+\gamma)f_1+(\alpha+\beta+3\gamma)f_2+(2\gamma)f_3=0$

On en déduit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Ainsi la famille $\{f_1+f_2 ; -f_1+f_2 ; f_1+3f_2+2f_3\}$ est libre et elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Comme $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^3$, l'application est surjective

2) Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie et φ est linéaire, le théorème du rang donne : $\dim \ker(\varphi)+\dim \mathrm{Im}(\varphi)=\dim \mathbb{R}^4$.

donc $\dim \ker(\varphi)=4-3=1$

On en déduit que l'application φ n'est pas injective.

3) Déterminons une base de $\ker(\varphi)$:

On cherche $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\varphi(x,y,z,t)=0$$

c'est-à-dire $\varphi(x,y,z,t)=x(f_1+f_2)+y(-f_2+f_2)+z(f_1+3f_2+2f_3)$
$+t(f_1+f_2+f_3)=0$

Soit $(x-y+z+t)f_1+(x+y+3z+t)f_2+(2z+t)f_3=0$

Ainsi, puisque $\{f_1, f_2, f_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+y+3z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}$$

la résolution de ce système linéaire donne :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-z \\ z=z, \ z\in\mathbb{R} \\ t=-2z \end{cases}$$

On en déduit :
$$\ker(\varphi)=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 8

1- On peut montrer facilement que
$$\ker(f)=\text{vect}\{e_2-e_3\}$$
et que $\dim \ker(f)=1$

2- On peut voir que : $\mathrm{Im}(f)=\text{vect}\{e_1, e_2+e_3\}$

3- Il est aisé de démontrer que :
$$\ker(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

4- Par simple calcul, on montre que :
$$f\circ f=Id_{\mathbb{R}^3}$$
Id : (fonction identique)

Exercice 9

1) L'application : $\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^x f(t)\,dt \end{aligned}$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'application A est bien une application de E à valeurs dans E.

2) On prend f et g deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre aisément que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$A(f+g)(x) = Af(x) + Ag(x)$$

$$A(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Exercice 10

Déterminer $\ker(f)$.

Soient $(x, y, z) \in \ker(f)$. Alors, on a le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\ker(f) = \{0\}$

On en déduit que f est injective et donc, d'après le théorème du rang de f est aussi bijective

L'endomorphisme f est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.